

Робастное, адаптивное и сетевое управление

© 2025 г. А.А. ГУКОВ (artemiy.gukoff4u@mail.ru)
(Институт проблем машиноведения РАН, Санкт-Петербург)

АДАПТИВНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ПО ВЫХОДУ С ГАРАНТИЕЙ ЗАДАННОГО КАЧЕСТВА РЕГУЛИРОВАНИЯ¹

Предложен алгоритм управления по выходу линейными объектами с произвольной относительной степенью в условиях параметрической неопределенности и ограниченных возмущений. В отличие от классических алгоритмов адаптивного управления предложенный алгоритм позволяет гарантировать слежение выхода объекта за эталонным сигналом с нахождением ошибки слежения в заданном разработчиком множестве. Приведен пример, иллюстрирующий эффективность предложенного метода.

Ключевые слова: адаптивное управление, динамическая система, замена координат, устойчивость, управление.

DOI: 10.31857/S0005231025050025, **EDN:** AXWDDU

1. Введение

В статье рассматривается задача адаптивного слежения выходного сигнала объекта за эталонным с гарантией заданного качества регулирования в любой момент времени. Рассматриваются линейные системы в условиях параметрической неопределенности и внешних возмущений.

Задача адаптивного управления с эталонной моделью, впервые сформулированная в 50-х годах XX в., является одной из наиболее изученных. Несмотря на ее внушительный возраст, она остается до сих пор актуальной. Возникают новые проблемы, такие как повышение вычислительной эффективности алгоритмов, улучшение качества настройки регуляторов, обобщение методов на более широкие классы систем и т.д.

Первые решения задач адаптивного управления были сопряжены с рядом допущений, например с доступностью измерения вектора состояния, с предположением строгой положительной вещественности передаточной функции системы или с воспроизводимостью задающего сигнала или внешних возмущений с помощью автономного генератора [1–4]. Подходы, использующие аппарат второго метода Ляпунова [5] и теории гиперустойчивости [6], требовали

¹ Работа выполнена в ИПМаш РАН при поддержке госзадания № FFNF-2024-0008 (№ 124041100006-1 в ЕГИСУ НИОКТР).

измерения старших производных ошибки слежения. Позже данная проблема была решена с помощью метода расширенной ошибки [7], алгоритмов адаптации высоких порядков [8], методов компенсации возмущений [9, 10] и т.д.

Одна из ключевых проблем в вышеописанных методах состоит в невозможности повлиять на качество переходных процессов [11]. Для частичного решения данной проблемы предлагались различные решения, например схема с ускоренной сходимостью [12, 13], схема с использованием больших коэффициентов в обратной связи [14], выполнение условия не исчезающего возбуждения [15], негладкие законы управления [16] и т.д.

Таким образом, методы [7–10, 12–16] сопряжены с наложением существенных ограничений и решают задачу не в полном объеме, достигая цели управления лишь в асимптотике. При этом полученные оценки характеристик предельного множества достаточно грубые.

В [17–21] предложен метод, гарантирующий нахождение выходного сигнала в заданном множестве. В [22] на базе метода [17–21] предложен адаптивный закон управления с нахождением выходного сигнала в заданном множестве. Однако в [22] предполагается, что относительная степень объекта равна единице. В данной статье с использованием подходов [17–22] и модифицированного алгоритма адаптации [23] предлагается новое решение задачи адаптивного управления с гарантией заданного качества регулирования минимально-фазовыми объектами [7, 8, 12, 14–16] с произвольной относительной степенью.

Статья организована следующим образом. Во втором разделе формулируется задача адаптивного слежения с ограничениями на выходную переменную. В третьем разделе сначала синтезируется закон управления, предполагающий доступность измерению производных выходного сигнала объекта. Затем полученное решение обобщается на случай недоступности измерению данных производных. В четвертом разделе приведено численное моделирование, иллюстрирующее эффективность полученного решения.

2. Постановка задачи

Рассмотрим динамическую систему

$$(1) \quad Q(p)y(t) = kR(p)u(t) + f(t),$$

где $t \geq 0$, $u(t) \in \mathbb{R}$ – сигнал управления, $y(t) \in \mathbb{R}$ – регулируемый сигнал, доступный измерению, $f(t) \in \mathbb{R}$ – ограниченное внешнее возмущение, $Q(s)$ и $R(s)$ – нормализованные полиномы (т.е. полиномы со старшими коэффициентами, равными 1) с неизвестными вещественными коэффициентами и со степенями, равными n и m соответственно, $\rho = n - m \geq 1$, полином $R(s)$ гурвицев, $p = d/dt$ – оператор дифференцирования, коэффициент $k > 0$ неизвестен, начальные условия $y^{(i)}(0)$, $i = \overline{2, n}$ неизвестны, но известно множество начальных условий $y(0)$. Всюду в статье s – комплексная переменная.

Зададим эталонную модель:

$$(2) \quad T(p)y_m(t) = k_m g(t),$$

где $g(t) \in \mathbb{R}$ – ограниченное и $(\rho - 1)$ раз дифференцируемое задающее воздействие, $y_m(t) \in \mathbb{R}$ – выход эталонной модели, $T(s)$ – известный нормализованный гурвицев полином с вещественными коэффициентами и степени ρ , $k_m > 0$.

Цель работы состоит в синтезе закона управления, обеспечивающего принадлежность ошибки слежения $e(t) = y(t) - y_m(t)$ следующему множеству:

$$(3) \quad \mathcal{E} = \{(t, e) \in \mathbb{R}^2 \mid t \geq 0, \underline{g}(t) < e(t) < \bar{g}(t)\},$$

где функции $\underline{g}(t) < 0$, $\bar{g}(t) > 0$, $\bar{g}(t) - \underline{g}(t) > \delta$, $\delta > 0$ ограничены и имеют ограниченные первые производные для любых $t \geq 0$, а также $e(0) \in \mathcal{E}$. Ограниченность производных $\underline{g}(t)$ и $\bar{g}(t)$ необходима для применения метода [19].

3. Основной результат

3.1. Синтез идеального закона управления

Введем вспомогательное управляющее воздействие v и сначала предположим, что его производные доступны измерению. Рассмотрим закон управления

$$(4) \quad u(t) = \frac{T(p)}{p} v(t).$$

Представим полиномы $Q(s)$ и $R(s)$ в виде $Q(s) = Q_m(s) + \Delta Q(s)$ и $R(s) = R_m(s) + \Delta R(s)$, где нормализованные гурвицевы полиномы $Q_m(s)$ и $R_m(s)$ имеют степени n и m соответственно, и $Q_m(s)/R_m(s) = T(s)$. Неизвестные полиномы $\Delta Q(s)$ и $\Delta R(s)$ имеют степени $n - 1$ и $m - 1$ соответственно. Преобразуем (1), учитывая (4), к виду

$$(5) \quad Q_m(p)y(t) = \frac{kR_m(p)T(p)}{p}v(t) + \frac{k\Delta R(p)T(p)}{p}v(t) - \Delta Q(p)y(t) + f(t).$$

Разделив (5) на $Q_m(p)$, $kR_m(p)T(p)$ и p , запишем результат в виде

$$(6) \quad y(t) = \frac{k}{p} \left[v(t) + \frac{\Delta R(p)}{R_m(p)} v(t) - \frac{p\Delta Q(p)}{kQ_m(p)} y(t) + \frac{p}{kQ_m(p)} f(t) + \epsilon_1(t) \right],$$

где $\epsilon_1(t)$ – экспоненциально затухающая функция, зависящая от начальных условий (1). Выразим $y_m(t)$ из (2) в виде

$$(7) \quad y_m(t) = \frac{k}{p} \left[\frac{k_m}{k} g_r(t) + \epsilon_2(t) \right],$$

где $g_r(t) = \frac{p}{T(p)}g(t)$, $\epsilon_2(t)$ – экспоненциально затухающая функция, зависящая от начальных условий (2). Учитывая структуру (6) и (7), перепишем $e(t)$ в виде

$$(8) \quad e(t) = \frac{k}{p} \left[v(t) - c_{01}y(t) - c_{02}^\top \zeta_y(t) - c_{03}^\top \zeta_v(t) - \frac{k_m}{k} g_r(t) + \frac{p}{kQ_m(p)} f(t) + \epsilon(t) \right],$$

где $\epsilon(t) = \epsilon_1(t) - \epsilon_2(t)$, сигналы $\zeta_y(t)$, $\zeta_v(t)$ и $g_r(t)$ сформированы с помощью следующих фильтров:

$$(9) \quad \begin{aligned} \dot{\zeta}_y(t) &= F_y \zeta_y(t) + b_y y(t), & \zeta_y(0) &= 0, \\ \dot{\zeta}_v(t) &= F_v \zeta_v(t) + b_v v(t), & \zeta_v(0) &= 0, \\ \dot{\zeta}_g(t) &= F_g \zeta_g(t) + b_g g(t), & \zeta_g(0) &= 0, & g_r(t) &= L_2 \zeta_g(t). \end{aligned}$$

Здесь $b_i^\top = [0 \ \dots \ 0 \ 1]$ – вектор-столбец с единицей на последней позиции и нулями на остальных, $i \in \{y, v, g, \eta\}$, $L_j = [0 \ \dots \ 0 \ 1 \ 0 \ \dots \ 0]$ – вектор-строка с единицей на j -й позиции и нулями на остальных. Здесь и далее матрицы b_i и L_j будут иметь ту же структуру, а их размерность будет понятна из контекста. Матрицы F_y , F_v и F_g фильтров (9) заданы в форме Фробениуса с характеристическими полиномами $Q_m(s)$, $R_m(s)$ и $T(s)$ соответственно. Коэффициент c_{01} получен из следующего выражения:

$$\frac{p\Delta Q(p)}{kQ_m(p)} = c_{01} + \frac{\Delta \tilde{Q}(p)}{kQ_m(p)},$$

где $\Delta \tilde{Q}(s)$ – неизвестный полином степени $n - 1$. Векторы c_{02} и c_{03} состоят из коэффициентов многочленов $\Delta \tilde{Q}(s)/k$ и $\Delta R(s)/k$ соответственно. Введем вектор постоянных неизвестных параметров $c_0^\top = [c_{01} \ c_{02}^\top \ c_{03}^\top \ k_m/k]$ и вектор регрессии $\omega^\top(t) = [y(t) \ \zeta_y^\top(t) \ \zeta_v^\top(t) \ g_r(t)]$. Перепишем (8) как

$$(10) \quad \dot{e}(t) = k \left(v(t) - c_0^\top \omega(t) + \bar{f}(t) + \epsilon(t) \right),$$

где $\bar{f}(t) = \frac{p}{kQ_m(p)} f(t)$ – сигнал, ограниченный в силу гурвицевости $Q_m(s)$.

Применим метод [19] для задания вспомогательного управляющего воздействия $v(t)$, гарантирующего нахождение ошибки $e(t)$ во множестве (3). Для этого введем в рассмотрение вспомогательный сигнал $\varepsilon(t)$, вычисляемый из формулы

$$(11) \quad e(t) = \Phi(\varepsilon(t), t),$$

где функция $\Phi(\varepsilon(t), t)$ удовлетворяет условиям:

а) $\underline{g}(t) < \Phi(\varepsilon(t), t) < \overline{g}(t)$ для любых $t \geq 0$ и $\varepsilon \in \mathbb{R}$;

б) функция $\Phi(\varepsilon(t), t)$ непрерывно-дифференцируемая по $\varepsilon(t)$ и t , причем для любых $e \in \mathcal{E}$ и $t \geq 0$ выполнено

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon}(\varepsilon(t), t) \neq 0;$$

в) функция $\frac{\partial \Phi}{\partial t}(\varepsilon(t), t)$ ограничена для любых $\varepsilon \in \mathbb{R}$ и $t \geq 0$.

Приведем пример преобразования (11) в виде

$$(12) \quad \Phi(\varepsilon(t), t) = \frac{\bar{g}(t) \exp(\varepsilon(t)) + \underline{g}(t)}{\exp(\varepsilon(t)) + 1}.$$

Другие примеры подобных функций (11) можно найти в [19].

Принимая во внимание (11), рассмотрим полную производную по времени от $e(t)$ в виде

$$\dot{e}(t) = \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon}(\varepsilon(t), t) \dot{\varepsilon}(t) + \frac{\partial \Phi}{\partial t}(\varepsilon(t), t).$$

Учитывая (10) и свойство (б), выразим $\dot{e}(t)$ следующим образом:

$$(13) \quad \dot{e}(t) = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon}(\varepsilon(t), t) \right)^{-1} \left(k(v(t) - c_0^\top \omega(t) + \bar{f}(t) + \epsilon(t)) - \frac{\partial \Phi}{\partial t}(\varepsilon(t), t) \right).$$

Теперь выберем вспомогательное управляющее воздействие и алгоритм адаптации в виде

$$(14) \quad v(t) = -\text{sign} \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon}(\varepsilon(t), t) \right\} \alpha \varepsilon(t) + c^\top(t) \omega(t),$$

$$(15) \quad \dot{c}(t) = - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon}(\varepsilon(t), t) \right)^{-1} \varepsilon(t) \omega(t) - \gamma c(t),$$

где $\alpha > 0$ и $\gamma > 0$, $c(t)$ – вектор настраиваемых параметров. Преобразование $\Phi(\varepsilon(t), t)$ выбирается заранее, а знак $\frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon}(\varepsilon(t), t)$ неизменен в силу свойства (б), поэтому значение функции $\text{sign}\{\cdot\}$ в (14) известно. Подставляя (14) в (13), получим следующее выражение:

$$(16) \quad \begin{aligned} \dot{e}(t) = & \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon}(\varepsilon(t), t) \right)^{-1} \left(-\text{sign} \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon}(\varepsilon(t), t) \right\} k \alpha \varepsilon(t) + \right. \\ & \left. + k(c(t) - c_0)^\top \omega(t) + \Xi(t) \right), \end{aligned}$$

где $\Xi(t) = k(\bar{f}(t) + \epsilon(t)) - \frac{\partial \Phi}{\partial t}(\varepsilon(t), t)$ – ограниченная функция. Сформулируем теорему, доказательство которой приведено в Приложении.

Теорема 1. Пусть функции $\underline{g}(t)$ и $\bar{g}(t)$ удовлетворяют наложенным требованиям (см. абзац после (3)) и выполнены свойства (а)–(в) преобразования (11). Тогда для любых $\alpha > 0$ и $\gamma > 0$ в замкнутой системе (1), (2), (9), (15), (16) будет достигнута цель управления (3).

Замечание 1. В [22] рассмотрена задача с относительной степенью объекта, равной 1, и известным коэффициентом k . В отличие от представленного в [22] алгоритма предложенная в настоящей работе процедура позволяет исключить слагаемое, содержащее $e(t)$, из динамики $\varepsilon(t)$ и выбрать упрощенный закон управления, а также преодолеть проблему неизвестного k .

3.2. Синтез реализуемого закона управления

Закон управления (4) содержит производные вспомогательного управляющего воздействия v вплоть до $(\rho - 1)$ порядка. Введем в рассмотрение оценку $\tilde{v}$ вспомогательного управляющего воздействия (14). Тогда новый закон управления будет выглядеть как

$$(17) \quad u(t) = \frac{T(p)}{p} \tilde{v}(t),$$

$$(18) \quad \dot{\xi}(t) = G_0 \xi(t) + D_0(\tilde{v}(t) - v(t)), \quad \tilde{v}(t) = \xi_1(t) = L_1 \xi(t).$$

Здесь $\xi(t) \in \mathbb{R}^\rho$ – вектор оценок сигнала v и его производных,

$$G_0 = \begin{bmatrix} 0 & I_{\rho-1} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad D_0^\top = \begin{bmatrix} -\frac{d_1}{\mu} & -\frac{d_2}{\mu^2} & \dots & -\frac{d_\rho}{\mu^\rho} \end{bmatrix},$$

числа d_i , $i = \overline{1, \rho}$ выбираются так, чтобы матрица $G = G_0 + DL_1$ была гурвицевой, $D^\top = [d_1 \ d_2 \ \dots \ d_\rho]$, а $\mu > 0$ – достаточно малое число. Введем в рассмотрение следующий вектор:

$$(19) \quad \eta(t) = \Gamma^{-1}(\xi(t) - \theta(t)), \quad \Gamma = \text{diag} \{ \mu^{\rho-1}, \mu^{\rho-2}, \dots, \mu, 1 \},$$

где $\theta^\top(t) = [v(t) \ \dot{v}(t) \ \dots \ v^{(\rho-1)}(t)]$. Принимая во внимание (19), запишем:

$$(20) \quad \Delta v(t) = \tilde{v}(t) - v(t) = \mu^{\rho-1} \eta_1(t) = \mu^{\rho-1} L_1 \eta(t), \quad \tilde{v}(t) = v(t) + \mu^{\rho-1} L_1 \eta(t).$$

С учетом (17) и (20) выразим $\dot{\varepsilon}$ как

$$(21) \quad \dot{\varepsilon}(t) = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon}(\varepsilon(t), t) \right)^{-1} \left(-\text{sign} \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon}(\varepsilon(t), t) \right\} k \alpha \varepsilon(t) + \right. \\ \left. + k(c(t) - c_0)^\top \omega(t) + \mu^{\rho-1} k L_1 \eta(t) + \Xi(t) \right).$$

Учитывая (18) и (19), получим

$$(22) \quad \mu \dot{\eta}(t) = G \eta(t) - \mu b_\eta v^{(\rho)}(t).$$

Сформулируем основной результат статьи.

Теорема 2. Пусть выполнены условия теоремы (1). Тогда существует такое число μ_0 , что при $\mu \leq \mu_0$ в замкнутой системе (1), (2), (9), (15), (21), (22) будет достигнута цель управления (3).

Замечание 2. Уравнение (22) представляет собой сингулярно возмущенную динамическую систему. Из анализа таких систем известно [24], что при определенных условиях на правую часть системы и при достаточно малых μ система обладает той же областью диссипативности и той же областью притяжения, что и система при $\mu = 0$, что эквивалентно использованию

идеального закона управления. Как было показано в теореме (1), такая система достигает цели (3), поэтому для доказательства теоремы достаточно будет воспользоваться одним из результатов теории сингулярно возмущенных систем.

Теорема 2 показывает существование достаточно малого параметра μ_0 , в то время как поиск фактического значения является неразрешенной проблемой. Поиск некоторых количественных характеристик, в структуру которых входят наблюдатели высокого порядка, не всегда возможен и зачастую остается в качественном виде [25, 26]. В [27, 28] отмечается, что итеративный поиск величины μ_0 , при котором достигается устойчивость замкнутой системы, может осуществляться на этапе моделирования.

Доказательство теоремы 2. Перепишем (21) и (22) в виде

$$(23) \quad \begin{aligned} \dot{\varepsilon}(t) = & \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon}(\varepsilon(t), t) \right)^{-1} \left(-\text{sign} \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon}(\varepsilon(t), t) \right\} k \alpha \varepsilon(t) + \right. \\ & \left. + k(c(t) - c_0)^\top \omega(t) + \mu_2^{\rho-1} k L_1 \eta(t) + \Xi(t) \right), \\ \mu_1 \dot{\eta}(t) = & G \eta(t) - \mu_2 b_\eta v^{(\rho)}(t), \end{aligned}$$

где $\mu_1 = \mu_2 = \mu$. Воспользуемся леммой из [29].

Лемма. Если система описывается уравнением $\dot{x} = f(x, \mu_1, \mu_2)$, $x \in \mathbb{R}^{m_0}$, где $f(x, \mu_1, \mu_2)$ – непрерывная функция, липшицева по x и при $\mu_2 = 0$ имеет ограниченную замкнутую область диссипативности $D = \{x \mid F(x) < C\}$, где $F(x)$ – положительно определенная в $\mathbb{R}^{m_0}$ (в смысле [30]) непрерывная кусочно-гладкая функция, то существует $\mu_0 > 0$ такое, что при $\mu_2 \leq \mu_0$ исходная система имеет ту же область диссипативности D , если для некоторых $C_1 > 0$ и $\bar{\mu}_1 > 0$ при $\mu_2 = 0$ выполнено соотношение

$$\sup_{|\mu_1| \leq \bar{\mu}_1} \left\{ \left\langle \frac{\partial F}{\partial x}(x), f(x, \mu_1, 0) \right\rangle \right|_{F(x)=C} \right\} \leq -C_1.$$

При подстановке $\mu_2 = 0$ в (23) имеем полученную в предыдущем подразделе замкнутую систему с идеальным законом управления. В теореме 1 показано стремление решений замкнутой системы в ограниченное множество, а дополнительное уравнение $\mu_1 \dot{\eta}(t) = G \eta(t)$ не нарушает данное условие в силу гурвицевости G . Значит, при достаточно малом μ система сохранит область диссипативности. Теорема доказана.

4. Моделирование

Пример 1. Рассмотрим объект управления (1) со следующими линейными дифференциальными операторами:

$$Q(p) = p^4 + 6p^3 - 3p^2 - p + 2 \quad \text{и} \quad kR(p) = p + 1.$$

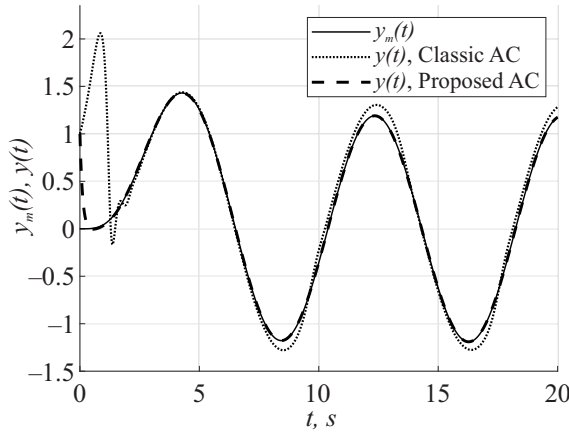


Рис. 1. Выход эталонной модели (сплошная кривая), выход объекта (1) при использовании адаптивного робастного алгоритма высокого порядка (точечная кривая), выход объекта (1) при использовании предложенного алгоритма (пунктирная кривая).

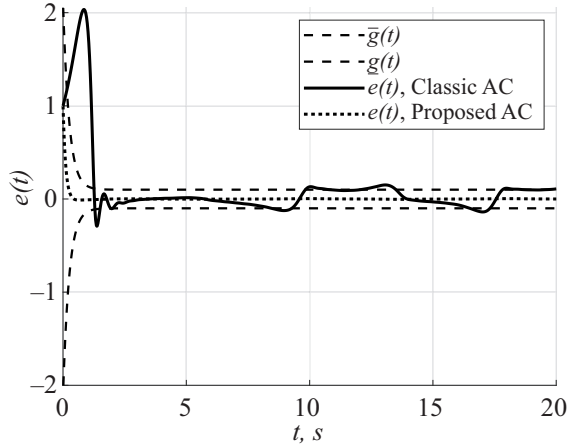


Рис. 2. Ограничения $\bar{g}(t)$ и $\underline{g}(t)$ (пунктирные кривые), ошибка регулирования при использовании адаптивного робастного алгоритма высокого порядка (сплошная кривая), ошибка регулирования при использовании предложенного алгоритма (точечная кривая).

Начальные условия $p^3y(0) = p^2y(0) = py(0) = y(0) = 1$. Внешнее возмущение $f(t) = 2\sin(1,5t) + d(t)$, где $d(t) = \text{sat}\{\hat{d}(t)\}$, $\text{sat}\{\cdot\}$ – функция насыщения, $\hat{d}(t)$ – белый шум, моделируемый в Matlab Simulink с помощью блока “Band-Limited White Noise” с параметром “Noise power”, равным 1, и “Sample time”, равным 0,1. Эталонная модель (2), на которую подается задающее воздействие $g(t) = 2,5\sin(0,8t)$, имеет следующие параметры:

$$T(p) = p^3 + 3p^2 + 3p + 1 \quad \text{и} \quad k_m = 1.$$

Согласно (4) зададим закон управления в виде $u(t) = \frac{T(p)}{p}v(t)$. В качестве функции $\Phi(\varepsilon(t), t)$ возьмем (12). Ограничения для ошибки слежения зададим функциями $\bar{g}(t) = 2 \exp(-4t) + 0,1$ и $\underline{g}(t) = -\bar{g}(t)$. Выберем $Q_m(p) = p^4 + 4p^3 + 6p^2 + 4p + 1$, $R_m(p) = p + 1$ и зададим в фильтрах (9): $F_v = -1$, $F_g = \begin{bmatrix} 0 & I_2 \\ -1 & -3 & -3 \end{bmatrix}$ и $F_y = \begin{bmatrix} 0 & I_3 \\ -1 & -4 & -6 & -4 \end{bmatrix}$. Выберем в (14), (15) и (18) параметры $\alpha = 5$, $\gamma = 1$ и $\mu = 10^{-3}$. Сравним предложенный алгоритм управления с классическим адаптивным алгоритмом адаптации высокого порядка [31] с параметрами $\sigma_c = 5$, $\gamma_c = 100$ и $\mu_c = 200$.

На рис. 1 и 2 видно, что классический алгоритм не справляется с поставленной задачей. Во-первых, отсутствует возможность задать качество регулирования во время переходных процессов. Во-вторых, предельное множество не определяется заранее и оказывается больше, чем заданное с помощью предложенного алгоритма.

5. Заключение

В статье предложен новый алгоритм адаптивного слежения за выходом эталонной модели с гарантией заданного качества регулирования на всем промежутке функционирования системы. Метод объединяет в себе идею адаптивного управления [23] и подход [19], использованный для синтеза нелинейного закона управления в условиях ограничений. Произведено сравнение полученного результата с классическим законом адаптивного управления высокого порядка [31] путем моделирования. Предложенный алгоритм позволил обеспечить нахождение ошибки слежения в заранее заданном множестве в любой момент времени, в то время как методы [23, 31] не позволяют контролировать значения ошибки слежения в переходном режиме. Кроме того, оценки величины предельного целевого множества, полученные в [23, 31], зависят от значений неизвестных параметров и имеют завышенные значения, в связи с чем не могут использоваться для задания точности регулирования в установившемся режиме. Предложенный подход решает обе указанные проблемы, а качество регулирования полностью определяется выбором ограничивающих функций.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство теоремы 1.

В силу свойства (б) преобразования (11) функция $\frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon}(\varepsilon(t), t)$ является знакоопределенной. Сначала предположим, что $\frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon}(\varepsilon(t), t) > 0$. Выберем функцию Ляпунова вида

$$V_1 = 0,5\varepsilon^2(t) + 0,5k(c(t) - c_0)^\top (c(t) - c_0) + \chi \int_t^\infty \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon}(\varepsilon(s), s) \right)^{-1} \varepsilon^2(s) ds,$$

где $\chi > 0$. Учитывая (15) и (16), найдем $\dot{V}_1$ в виде

$$(П.1) \quad \begin{aligned} \dot{V}_1 = & -\alpha k \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon}(\varepsilon(t), t) \right)^{-1} \varepsilon^2(t) + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon}(\varepsilon(t), t) \right)^{-1} \varepsilon(t)(\psi(t) + k\varepsilon(t)) - \\ & - \gamma k(c(t) - c_0)^\top c(t) - \chi \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon}(\varepsilon(t), t) \right)^{-1} \varepsilon^2(t), \end{aligned}$$

где $\psi(t) = k\bar{f}(t) - \frac{\partial \Phi}{\partial t}(\varepsilon(t), t)$. Воспользуемся следующими соотношениями:

$$(П.2) \quad \begin{aligned} \varepsilon(t)\psi(t) & \leq 0,5(\nu^{-1}\varepsilon^2(t) + \nu\psi^2(t)), \\ \varepsilon(t)\varepsilon(t) & \leq 0,5(\nu^{-1}\varepsilon^2(t) + \nu\varepsilon^2(t)), \\ -(c(t) - c_0)^\top c(t) & = -0,5((c(t) - c_0)^\top (c(t) - c_0) + c^\top(t)c(t) - c_0^\top c_0). \end{aligned}$$

С учетом (П.2) перепишем (П.1) как

$$(П.3) \quad \begin{aligned} \dot{V}_1 \leq & -\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon}(\varepsilon(t), t) \right)^{-1} (\alpha k - 0,5\nu^{-1}(1 + k))\varepsilon^2(t) + \\ & + 0,5 \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon}(\varepsilon(t), t) \right)^{-1} \nu\psi^2(t) + 0,5\gamma k c_0^\top c_0 - \\ & - 0,5\gamma k((c(t) - c_0)^\top (c(t) - c_0) + c^\top(t)c(t)) - \\ & - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon}(\varepsilon(t), t) \right)^{-1} (\chi - 0,5k\nu)\varepsilon^2(t). \end{aligned}$$

Заметим, из свойств (а) и (б) функции (11) следует, что она всюду дифференцируема, строго монотонна и ограничена, а значит, $\sup_{t \geq 0} \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon}(\varepsilon(t), t) \right\} < \infty$. Кроме того, $\sup_{t \geq 0} \{\psi(t)\} < \infty$ согласно свойству (в). Тогда из (П.3) следует, что $\dot{V}_1 < 0$ достигается при выполнении следующих условий:

$$(П.4) \quad \nu > 0,5\alpha^{-1}(k^{-1} + 1), \quad \chi > 0,5k\nu,$$

$$|\varepsilon(t)| > \sqrt{\frac{0,5}{\alpha k - 0,5\nu^{-1}(1 + k)} \left(\frac{\nu}{k} \sup_{t \geq 0} \{\psi(t)\}^2 + \sup_{t \geq 0} \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon}(\varepsilon(t), t) \right\} \gamma k c_0^\top c_0 \right)}.$$

Очевидно, что всегда найдутся ν и χ такие, что условия (П.4) выполнены. Следовательно, $\dot{V}_1 < 0$.

Теперь рассмотрим случай $\frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon}(\varepsilon(t), t) < 0$. Выберем функцию Ляпунова вида

$$V_2 = 0,5\varepsilon^2(t) + 0,5k(c(t) - c_0)^\top (c(t) - c_0).$$

Найдем $\dot{V}_2$ в виде

$$(П.5) \quad \begin{aligned} \dot{V}_2 = & \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon}(\varepsilon(t), t) \right)^{-1} k\alpha\varepsilon^2(t) + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon}(\varepsilon(t), t) \right)^{-1} \varepsilon(t)(\psi(t) + k\varepsilon(t)) - \\ & - \gamma k(c(t) - c_0)^\top c(t). \end{aligned}$$

Применяя соотношения (П.2) при $\nu = 1$, перепишем (П.5) как

$$\begin{aligned}
 \dot{V}_2 \leq & \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon}(\varepsilon(t), t) \right)^{-1} (\alpha k + 0,5k + 0,5) \varepsilon^2(t) + \\
 & + 0,5 \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon}(\varepsilon(t), t) \right)^{-1} \psi^2(t) + 0,5 \gamma k c_0^\top c_0 - \\
 & - 0,5 \gamma k ((c(t) - c_0)^\top (c(t) - c_0) + c^\top(t) c(t)) + \\
 & + 0,5 \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon}(\varepsilon(t), t) \right)^{-1} k \epsilon^2(t).
 \end{aligned}
 \tag{П.6}$$

Так как $\frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon}(\varepsilon(t), t) < 0$, то все слагаемые, кроме $0,5 \gamma k c_0^\top c_0$, отрицательны. Ранее показано, что $\sup_{t \geq 0} \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon}(\varepsilon(t), t) \right\} < \infty$. Тогда из (П.6) следует, что $\dot{V}_2 < 0$ достигается при выполнении условия

$$|\varepsilon(t)| > \sqrt{-\inf_{t \geq 0} \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon}(\varepsilon(t), t) \right\} \frac{0,5 \gamma k c_0^\top c_0}{\alpha k + 0,5k + 0,5}}.
 \tag{П.7}$$

Неравенства (П.4) и (П.7) определяют множества, в которые стремятся траектории (16) в каждом из рассмотренных случаев. Тогда по теореме 3.1 из [19] траектории (10) будут принадлежать некоторому подмножеству $\mathcal{E}$, а это означает выполнение цели (3). Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Landau I.D.* A survey of model reference adaptive techniques—Theory and applications // *Automatica*. 1974. V. 10. No. 4. P. 353–379. ISSN 0005-1098. [https://doi.org/10.1016/0005-1098\(74\)90064-8](https://doi.org/10.1016/0005-1098(74)90064-8)
2. *Chang-chieh Hang, Parks P.C.* Comparative studies of model reference adaptive control systems // *IEEE Trans. Autom. Control*. 1973. V. 18. No. 5. P. 419–428.
3. *Johnson C.D.* Accommodation of external disturbances in linear regulator and servomechanism problems // *IEEE Trans. Autom. Control*. 1971. V. 16. No. 6. P. 635–644.
4. *Davison E.J.* The robust control of a servomechanism problem for linear timeinvariant multivariable systems // *IEEE Trans. Autom. Control*. 1976. V. 21. P. 25–34.
5. *Parks P.* Liapunov redesign of model reference adaptive control systems // *IEEE Trans. Autom. Control*. 1976. V. 11. No. 3. P. 362–367.
6. *Landau I.D., Ioan D.* A hyperstability criterion for model reference adaptive control systems // *IEEE Trans. Autom. Control*. 1969. V. 14. P. 552–555. <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:121498902>
7. *Morse A.S.* Global stability of parameter adaptive control systems // *IEEE Trans. Autom. Control*. 1980. V. 25. No. 3. P. 433–439.
8. *Morse A.S.* High-order parameter tuners for the adaptive control of nonlinear systems // *US-Italy Seminar Syst. Model. Feedback Theor. Appl.* 1992. V. 12. P. 339–364. https://doi.org/10.1007/978-1-4757-2204-8_23

9. Андреевский Б.Р., Фуртат И.Б. Наблюдатели возмущений: методы и приложения. Часть 1. Методы // *АиТ*. 2020. № 9. С. 3–61.
10. Андреевский Б.Р., Фуртат И.Б. Наблюдатели возмущений: методы и приложения. Часть 2. Приложения // *АиТ*. 2020. № 10 С. 35–92.
11. Zang Z., Bitmead, R. Transient bounds for adaptive control systems // *IEEE Trans. Autom. Control*. 1991. V. 5. No. 39. P. 2724–2729.
<http://dx.doi.org/10.1109/CDC.1990.203273>
12. Kreisselmeier G. Adaptive observers with exponential rate of convergence // *IEEE Trans. Autom. Control*. 1977. V. 22. No. 1. P. 2–8.
<https://doi.org/10.1109/TAC.1977.1101401>
13. Lion P.M. Rapid identification of linear and nonlinear systems // *AIAA J*. 1967. V. 5. P. 1835–1842.
14. Sun J. A modified model reference adaptive control scheme for improved transient performance // *IEEE Trans. Autom. Control*. 1993. V. 38. No. 8. P. 1255–1259.
<https://doi.org/10.1109/9.233162>
15. Arteaga M., Tang Y. Adaptive control of robots with an improved transient performance // *IEEE Trans. Autom. Control*. 2002. V. 47. P. 1198–1202.
<http://dx.doi.org/10.1109/TAC.2002.800672>
16. Morse A.S. Supervisory Control of Families of Linear Set-Point Controllers-Part I. Exact Matching // *IEEE Trans. Autom. Control*. 1996. V. 41. No. 10. P. 1413–1431.
<https://doi.org/10.1109/9.539424>
17. Фуртат И.Б. Дивергентные условия устойчивости динамических систем // *АиТ*. 2020. № 2. С. 62–75.
18. Фуртат И.Б., Гуцин П.А. Управление динамическими объектами с гарантией нахождения регулируемого сигнала в заданном множестве // *АиТ*. 2021. № 4. С. 121–139.
19. Furtat I.B., Gushchin P.A. Nonlinear feedback control providing plant output in given set // *Int. J. Control*. 2022. V. 95. No. 6. P. 1533–1542.
<https://doi.org/10.1080/00207179.2020.1861336>
20. Фуртат И.Б. Плотностные системы. Анализ и управление // *АиТ*. 2023. № 11. С. 55–76.
21. Фуртат И.Б., Гуцин П.А., Нгуен Ба Хю. Управление динамическими системами при ограничениях на входные и выходные сигналы // *АиТ*. 2023. № 4. С. 45–63.
22. Фуртат И.Б., Гуцин П.А., Нгуен Б., Колесник Н.С. Адаптивное управление с гарантией заданного качества регулирования // *УБС*. 2023. № 102. С. 44–57.
<https://doi.org/10.25728/ubs.2023.102.3>
23. Цыкунов А.М. Модифицированный адаптивный алгоритм высокого порядка для управления линейным объектом по выходу // *АиТ*. 2006. № 8. С. 143–153.
24. Халил Х.К. Нелинейные системы. М.-Ижевск: Ин-т компьютерных исслед., 2009.
25. Atassi A.N., Khalil H.K. A separation principle for the stabilization of a class of nonlinear systems // *IEEE Transact. Autom. Control*. 1999. V. 44. No. 9. P. 1672–1687. <https://doi.org/10.1109/9.788534>

26. *Borisov O.I., Pyrkin A.A., Isidori A.* Robust Output Regulation of Permanent Magnet Synchronous Motors by Enhanced Extended Observer // IFAC-PapersOnLine. 2020. V. 53. No. 2. P. 4881–4886. ISSN 2405-8963.
<https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2020.12.1056>
27. *Цыкунов А.М.* Алгоритм робастного управления нестационарным линейным объектом с компенсацией возмущения // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2008. № 4. С. 33–40.
28. *Цыкунов А.М.* Алгоритмы робастного управления с компенсацией ограниченных возмущений // АиТ. 2007. № 7. С. 103–115.
29. *Брусин В.А.* Об одном классе сингулярно-возмущенных адаптивных систем. I // АиТ. 1995. № 4. С. 119–129. <https://doi.org/10.25728/ubs.2023.102.3>
30. *Пуш Н., Абетс П., Лалуа М.* Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости. М.: Мир, 1980.
31. *Мирошник И.В., Никифоров В.О., Фрадков А.Л.* Нелинейное и адаптивное управление сложными динамическими системами. Учебное пособие. СПб.: Наука, 2000.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.И. Матасовым.

Поступила в редакцию 21.08.2024

После доработки 10.03.2025

Принята к публикации 16.03.2025